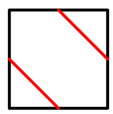
12th Benelux Mathematical Olympiad

Virtual, 1–3 May 2020

Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad.

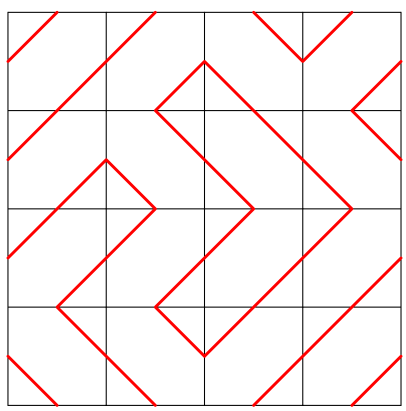
Uppgift 1. Bestäm alla positiva heltal d som har följande egenskap: det finns ett polynom P av grad d med heltalskoefficienter, sådant att $|P(m)| = 1$ för minst $d+1$ olika heltal m.

Uppgift 2. Låt N vara ett positivt heltal. En mängd bestående av $4N^2$ kvadratiska brickor med sidan 1 och med två sträckor dragna på den, som i figuren nedan, är sammansatta till ett $2N \times 2N$ bräde. Brickorna kan roteras.



Sträckorna på brickorna bildar stigar på brädet. Bestäm det minsta möjliga och det största möjliga antalet sådana stigar.

Till exempel finns det 9 *stigar på* 4×4 *brädet nedan.*



Uppgift 3. Låt ABC vara en triangel. Cirkeln ω_A genom A tangerar linjen BC i B. Cirkeln ω_C genom C tangerar linjen AB i B. Låt D vara den andra skärningspunkten mellan cirklarna ω_A och ω_C. Låt M vara mittpunkten på sidan BC, och låt E vara skärningspunkten mellan linjerna MD och AC. Visa att E ligger på ω_A.

Uppgift 4. En delare d till ett positivt heltal n sägs vara en *nära* delare till n om $\sqrt{n} < d < 2\sqrt{n}$. Finns det ett positivt heltal med exakt 2020 nära delare?

Language: Swedish

Tillåten tid: 4 timmar och 30 minuter

För varje uppgift kan man få upp till 7 poäng