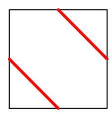
12th Benelux Mathematical Olympiad

Virtual, 2–3 May 2020

Les problèmes ne sont pas ordonnés par difficulté estimée.

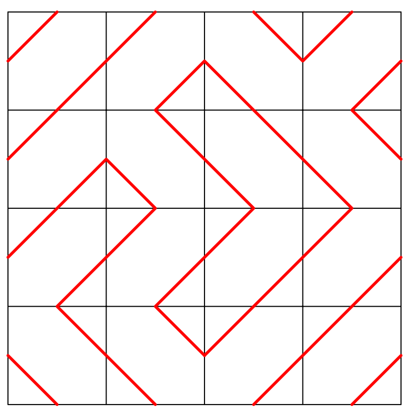
Problème 1. Trouver tous les entiers strictement positifs d avec la propriété suivante : il existe un polynôme P de degré d à coefficients entiers tel que $|P(m)| = 1$ pour au moins $d + 1$ entiers m distincts.

Problème 2. Soit N un entier strictement positif. Une collection de $4N^2$ carreaux comme ci-dessous, sur lesquels sont dessinés deux segments, est assemblée pour former un plateau $2N \times 2N$. Les carreaux peuvent être pivotés.



Les segments sur les carreaux définissent des chemins sur le plateau. Déterminer le plus petit et le plus grand nombre de chemins qu'il est possible d'observer.

Par exemple, il y a 9 *chemins sur le plateau* 4×4 *ci-dessous.*



Problème 3. Soit ABC un triangle. Le cercle ω_A passant par A est tangent à la droite BC en B. Le cercle ω_C passant par C est tangent à la droite AB en B. Les cercles ω_A et ω_C se coupent à nouveau en le point D. Soient M le milieu du segment $[BC]$ et E l'intersection des droites MD et AC. Montrer que E se situe sur ω_A.

Problème 4. Un diviseur d d'un entier strictement positif n est appelé diviseur *proche* de n si $\sqrt{n} < d < 2\sqrt{n}$. Existe-t-il un entier strictement positif ayant exactement 2020 diviseurs proches ?

Language: French

Temps accordé : 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points