10th Benelux Mathematical Olympiad

Luxembourg, 27th–29th April 2018

Language: **French**

Les problèmes ne sont pas ordonnés par difficulté estimée.

Problème 1. (a) Déterminer la valeur minimale de

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(x+\frac{1}{y}-2018\right)+\left(y+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{x}-2018\right),$$

où x et y sont des réels strictement positifs.

(b) Déterminer la valeur minimale de

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(x+\frac{1}{y}+2018\right)+\left(y+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{x}+2018\right),$$

où x et y sont des réels strictement positifs.

Problème 2. Au pays d'Heptanomisma, quatre pièces de monnaie différentes et trois billets différents sont utilisés, et leurs dénominations sont sept nombres naturels non nuls deux à deux distincts. La plus petite dénomination d'un billet est strictement supérieure à la somme des dénominations des quatre pièces de monnaie différentes. Un touriste possède une et une seule pièce de monnaie de chaque dénomination et un et un seul billet de chaque dénomination, mais il ne peut pas payer le livre de numismatique qu'il désire acheter. Cependant, le libraire matheux propose au touriste d'acheter le livre au prix de son choix, pourvu qu'il puisse payer ce prix d'au moins deux manières différentes.
(*Le touriste peut payer un prix de deux manières différentes s'il existe deux sous-ensembles différents de ses pièces et billets dont les sommes des dénominations sont toutes deux égales à ce prix.*)

(a) Prouver que le touriste peut acquérir le livre si la dénomination de chaque billet est strictement inférieure à 49.

(b) Montrer qu'il se peut que le touriste doive quitter la librairie les mains vides si la plus grande dénomination d'un billet vaut 49.

Problème 3. Soit ABC un triangle dont H est l'orthocentre, et soient D, E et F les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[AH]$. Les symétriques de B et C par rapport à F sont P et Q, respectivement.

(a) Montrer que les droites PE et QD se coupent sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

(b) Prouver que les droites PD et QE se coupent sur le segment $[AH]$.

Problème 4. Un entier $n \geqslant 2$ ayant exactement s diviseurs positifs $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_s = n$ est appelé *bon* s'il existe un entier k, avec $2 \leqslant k \leqslant s$, tel que $d_k > 1 + d_1 + \cdots + d_{k-1}$. Un entier $n \geqslant 2$ est appelé *mauvais* s'il n'est pas bon.

(a) Démontrer qu'il existe une infinité d'entiers mauvais.

(b) Prouver que, parmi sept entiers consécutifs quelconques tous strictement plus grands que 2, il y a toujours au moins quatre entiers bons.

(c) Montrer qu'il existe une infinité de suites de sept entiers consécutifs qui sont tous bons.

Temps: 4 heures et 30 minutes.
Chaque problème vaut 7 points.