10th Benelux Mathematical Olympiad

Luxembourg, 27th–29th April 2018

Language: **German**

Die Aufgaben sind nicht nach geschätzter Schwierigkeit geordnet.

Aufgabe 1. (a) Man bestimme den kleinstmöglichen Wert von

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(x+\frac{1}{y}-2018\right)+\left(y+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{x}-2018\right),$$

worin x und y (streng) positive reelle Zahlen sind.

(b) Man bestimme den kleinstmöglichen Wert von

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(x+\frac{1}{y}+2018\right)+\left(y+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{x}+2018\right),$$

worin x und y (streng) positive reelle Zahlen sind.

Aufgabe 2. Im Lande Heptanomisma werden vier verschiedene Münzen und drei verschiedene Scheine benutzt, deren Werte sieben paarweise verschiedene (streng) positive ganze Zahlen sind. Der Wert des kleinsten Scheines ist größer als die Summe der Werte der vier verschiedenen Münzen. Ein Tourist besitzt eine einzige Münze jedes Wertes, und einen einzigen Schein jedes Wertes, aber er kann sich das Buch über Numismatik das er zu kaufen wünscht nicht leisten. Der mathematisch veranlagte Buchhändler bietet jedoch an, dem Touristen das Buch zu einem Preis seiner Wahl zu überlassen, falls er diesen Preis auf mindestens zwei verschiedene Arten zahlen kann. (*Der Tourist kann einen Preis auf zwei verschiedene Arten zahlen falls es zwei verschiedene Teilmengen seiner Münzen und Scheine gibt, deren Werte sich jeweils auf diesen Preis aufaddieren.*)

(a) Man zeige, dass der Tourist das Buch kaufen kann wenn der Wert jedes Scheines (streng) kleiner als 49 ist.

(b) Man beweise, dass der Tourist den Buchladen möglicherweise mit leeren Händen verlassen muss, falls der größte Schein den Wert 49 hat.

Aufgabe 3. Es sei ABC ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H, und es seien D, E und F die jeweiligen Mittelpunkte der Strecken AB, AC und AH. Die Spiegelungen von B beziehungsweise C an F seien P beziehungsweise Q.

(a) Man beweise, dass die Geraden PE und QD einander auf dem Umkreis des Dreiecks ABC schneiden.

(b) Man zeige, dass die Geraden PD und QE einander auf der Strecke AH schneiden.

Aufgabe 4. Eine ganze Zahl $n \geqslant 2$ mit genau s positiven Teilern $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_s = n$ heiße *gut*, wenn es eine ganze Zahl k mit $2 \leqslant k \leqslant s$ gibt, so dass $d_k > 1 + d_1 + \cdots + d_{k-1}$ gilt. Eine ganze Zahl $n \geqslant 2$ heiße *schlecht*, falls sie nicht gut ist.

(a) Man zeige, dass es unendlich viele schlechte ganze Zahlen gibt.

(b) Man beweise, dass sich unter sieben aufeinander folgenden ganzen Zahlen, welche alle (streng) größer als 2 sind, immer mindestens vier gute ganze Zahlen befinden.

(c) Man zeige, dass es unendlich viele Folgen von sieben aufeinander folgenden guten ganzen Zahlen gibt.

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten.
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.