9th Benelux Mathematical Olympiad

5–7 May 2017 — Namur, Belgium

Problems

Language: ***French***

Les problèmes ***ne*** *sont* ***pas*** *ordonnés par difficulté estimée.*

Problème 1. Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ telles que

$$f(xy) \cdot \operatorname{pgcd}\Big(f(x)f(y), f(\tfrac{1}{x})f(\tfrac{1}{y})\Big) = xyf(\tfrac{1}{x})f(\tfrac{1}{y})$$

pour tout $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, où $\operatorname{pgcd}(a, b)$ désigne le plus grand commun diviseur de a et b.

Problème 2. Soit $n \geqslant 2$ un nombre entier. Alice et Bob jouent à un jeu concernant un pays constitué de n îles. Deux de ces n îles exactement possèdent une usine. Initialement il n'y a aucun pont dans le pays. Alice et Bob jouent chacun à leur tour de la manière suivante. À chaque tour, le joueur doit construire un pont entre deux îles différentes I_1 et I_2 telles que :

- I_1 et I_2 ne sont pas déjà reliées par un pont ;
- au moins une des deux îles I_1 et I_2 est reliée par une suite de ponts à une île avec une usine (ou possède elle-même une usine). (En effet, un accès à une usine est nécessaire pour la construction.)

Dès qu'un joueur construit un pont qui rend possible le passage d'une usine à l'autre, ce joueur perd le jeu. (Cela déclenche en effet une guerre industrielle entre les deux usines.) Si Alice entame le jeu, alors déterminer (pour chaque $n \geqslant 2$) qui a une stratégie gagnante.

(*Note* : Il est autorisé de construire un pont passant au-dessus d'un autre pont.)

Problème 3. Dans le quadrilatère convexe $ABCD$, on a $\angle B = \angle C$ et $\angle D = 90°$. Supposons que $|AB| = 2|CD|$. Prouver que la bissectrice de $\angle ACB$ est perpendiculaire à CD.

Problème 4. Un *n-carré Benelux* (avec $n \geqslant 2$) est une grille $n \times n$ composée de n^2 cases, chacune d'elles contenant un entier strictement positif, satisfaisant les conditions suivantes :

- les n^2 entiers strictement positifs sont deux à deux distincts ;
- si pour chaque ligne et chaque colonne on calcule le plus grand commun diviseur des n nombres dans cette ligne/colonne, alors on obtient $2n$ résultats différents.

(a) Prouver que, dans chaque n-carré Benelux (avec $n \geqslant 2$), il existe une case contenant un nombre supérieur ou égal à $2n^2$.

(b) Un n-carré Benelux est dit *minimal* si les n^2 nombres dans les cases sont inférieurs ou égaux à $2n^2$. Déterminer tous les $n \geqslant 2$ pour lesquels il existe un n-carré Benelux minimal.

Temps accordé : 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points