8th Benelux Mathematical Olympiad

Soest, 29 April – 1 May 2016

Opgave 1. Bepaal het grootste positieve gehele getal N met de volgende eigenschap: er bestaan gehele getallen $x_1, \ldots, x_N$ zodat voor alle $i \neq j$ het getal $x_i^2 - x_i x_j$ niet deelbaar is door 1111.

Opgave 2. Zij $n > 0$ een positief geheel getal. Veronderstel dat zijn positieve delers opgedeeld kunnen worden in paren op zo'n manier dat de som van elk paar een priemgetal is. Bewijs dat deze priemgetallen allemaal verschillend zijn en dat geen van hen een deler van n is.

Opgave 3. Bepaal alle functies $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ zodat

$$\Big(f\big(f(y) - x\big)\Big)^2 + f(x)^2 + f(y)^2 \;=\; f(y) \cdot \Big(1 + 2f\big(f(y)\big)\Big)$$

voor alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Opgave 4. Een cirkel ω gaat door de twee hoekpunten B en C van een driehoek ABC. Verder snijdt ω lijnstuk AC in $D \neq C$ en lijnstuk AB in $E \neq B$. Op de halfrechte vanuit B door D ligt een punt K zodat $|BK| = |AC|$, en op de halfrechte vanuit C door E ligt een punt L zodat $|CL| = |AB|$. Bewijs dat het middelpunt O van de omgeschreven cirkel van driehoek AKL op ω ligt.

Language: Dutch

Beschikbare tijd: 4,5 uur

Elke opgave is 7 punten waard