7th Benelux Mathematical Olympiad

Mersch, May 8–10 2015

Problèmes *(version française)*

Problème 1.

Déterminer le plus petit entier strictement positif q ayant la propriété suivante : pour tout entier m tel que $1 \leqslant m \leqslant 1006$, il existe un entier n qui vérifie

$$\frac{m}{1007} q < n < \frac{m+1}{1008} q.$$

Problème 2.

Soit ABC un triangle acutangle, et O le centre de son cercle circonscrit. Soit Γ_B le cercle passant par A et B qui est tangent à la droite AC, et soit Γ_C le cercle passant par A et C qui est tangent à la droite AB. Une droite arbitraire passant par A rencontre à nouveau Γ_B en X, et Γ_C en Y. Prouver que $|OX| = |OY|$.

Problème 3.

Existe-t-il un nombre premier dont l'écriture décimale est de la forme $3811\ldots11$ (c'est-à-dire, formée de gauche à droite par le chiffre 3 puis le chiffre 8, suivi d'au moins un chiffre 1) ?

Problème 4.

Une *progression arithmétique* est un ensemble de la forme $\{a, a+d, \ldots, a+kd\}$, où a, d, k sont des entiers strictement positifs et $k \geqslant 2$. Ainsi, une progression arithmétique contient au moins trois éléments, et deux éléments consécutifs diffèrent de d, qu'on appelle *la raison* de la progression arithmétique.

Soit n un entier strictement positif. Pour toute partition de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ en progressions arithmétiques, on considère la somme S des raisons respectives de ces progressions arithmétiques. Quelle est la valeur maximale que S peut atteindre ?

(Une partition d'un ensemble A est une collection de sous-ensembles de A disjoints dont la réunion est A.)