6th Benelux Mathematical Olympiad

Brugge, May 2–4 2014

1. Trouver la plus petite valeur possible de l'expression

$$\left\lfloor \frac{a+b+c}{d} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b+c+d}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c+d+a}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{d+a+b}{c} \right\rfloor,$$

dans laquelle a, b, c et d varient dans l'ensemble des entiers strictement positifs.

(Ici $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à x.)

2. Soit $k \geq 1$ un nombre entier.

Considérons $4k$ jetons, dont $2k$ sont rouges et $2k$ sont bleus. Une suite de ces $4k$ jetons peut être transformée en une autre suite par un *mouvement*, consistant à interchanger un certain nombre (éventuellement un) de jetons rouges consécutifs avec un nombre égal de jetons bleus consécutifs. Par exemple, un mouvement permet de passer de $r\underline{bb}br\underline{rr}b$ à $r\underline{rr}br\underline{bb}b$ où r désigne un jeton rouge et b désigne un jeton bleu.

Déterminer le plus petit nombre n (comme fonction de k) tel que, partant de n'importe quelle suite initiale des $4k$ jetons, il faut au plus n mouvements pour atteindre l'état dans lequel les $2k$ premiers jetons sont rouges.

3. Trouver tous les entiers $n \geq 2$ avec la propriété suivante:

> pour toute paire de diviseurs positifs $k, \ell < n$ de n, au moins un des nombres $2k - \ell$ et $2\ell - k$ est également un diviseur (non nécessairement positif) de n.

4. Soit $ABCD$ un carré. On considère un point variable P à l'intérieur du carré tel que $\widehat{BAP} \geq 60°$. Soit Q l'intersection de la droite AD avec la perpendiculaire à BP en P. Soit R l'intersection de la droite BQ avec la perpendiculaire à BP passant par C.

(a) Prouver que $|BP| \geq |BR|$.

(b) Pour quel(s) point(s) P l'inégalité en (a) devient-elle une égalité?

Language: French

Temps accordé: 4.5 heures
Chaque problème vaut 7 points