5th Benelux Mathematical Olympiad

Dordrecht, 26–28 April 2013

Opgave 1. Zij $n \geqslant 3$ een geheel getal. Een kikker beweegt al springend over de getallenlijn (getallenas). Hij start in het punt 0 en maakt n sprongen: één van lengte 1, één van lengte 2, $\ldots$, één van lengte n. Hij mag deze n sprongen in willekeurige volgorde uitvoeren. Als de kikker op een gegeven moment op een getal $a \leqslant 0$ zit, dan moet zijn volgende sprong naar rechts gaan (richting de positieve getallen). Als de kikker op een gegeven moment op een getal $a > 0$ zit, dan moet zijn volgende sprong naar links gaan (richting de negatieve getallen). Bepaal het grootste positieve gehele getal k zodanig dat de kikker zijn sprong in zo'n volgorde kan uitvoeren dat hij nooit landt op één van de getallen 1, 2, $\ldots$, k.

Opgave 2. Bepaal alle functies $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zodanig dat

$$f(x+y) + y \leqslant f(f(f(x)))$$

geldt voor alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Opgave 3. Zij $\triangle ABC$ een driehoek met omgeschreven cirkel Γ, en zij I het middelpunt van de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$. De lijnen AI, BI en CI snijden Γ in $D \neq A$, $E \neq B$ en $F \neq C$. De raaklijnen aan Γ in F, D en E snijden de lijnen AI, BI en CI in respectievelijk R, S en T. Bewijs dat

$$|AR| \cdot |BS| \cdot |CT| = |ID| \cdot |IE| \cdot |IF|.$$

Opgave 4.

a) Bepaal alle gehele getallen $g > 0$ met de volgende eigenschap: voor elk oneven priemgetal p is er een geheel getal $n > 0$ zodat p een deler is van de twee gehele getallen

$$g^n - n \quad \text{en} \quad g^{n+1} - (n+1).$$

b) Bepaal alle gehele getallen $g > 0$ met de volgende eigenschap: voor elk oneven priemgetal p is er een geheel getal $n > 0$ zodat p een deler is van de twee gehele getallen

$$g^n - n^2 \quad \text{en} \quad g^{n+1} - (n+1)^2.$$

Language: Dutch

Beschikbare tijd: 4,5 uur

Elk probleem is 7 punten waard