

# 5th Benelux Mathematical Olympiad

Dordrecht, 26–28 April 2013



**Problème 1.** Soit  $n \geq 3$  un nombre entier. Une grenouille s'apprête à sauter le long de la droite réelle. Elle commence au point 0 et fait  $n$  sauts: un de longueur 1, un de longueur 2,  $\dots$ , un de longueur  $n$ . Elle peut faire ces  $n$  sauts dans n'importe quel ordre. Si à un moment donné, la grenouille est assise sur un nombre  $a \leq 0$ , son prochain saut doit aller vers la droite (en direction des nombres positifs). Si à un moment donné, la grenouille est assise sur un nombre  $a > 0$ , son prochain saut doit aller vers la gauche (en direction des nombres négatifs). Trouver le plus grand entier strictement positif  $k$  pour lequel la grenouille peut effectuer ses sauts dans un ordre tel qu'elle n'atterrit jamais sur un des nombres  $1, 2, \dots, k$ .

**Problème 2.** Trouver toutes les fonctions  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$f(x + y) + y \leq f(f(f(x)))$$

soit satisfait pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Problème 3.** Soit  $\triangle ABC$  un triangle de cercle circonscrit  $\Gamma$ , et soit  $I$  le centre du cercle inscrit à  $\triangle ABC$ . Les droites  $AI$ ,  $BI$  et  $CI$  coupent  $\Gamma$  en  $D \neq A$ ,  $E \neq B$  et  $F \neq C$ . Les tangentes à  $\Gamma$  aux points  $F$ ,  $D$  et  $E$  coupent les droites  $AI$ ,  $BI$  et  $CI$  en  $R$ ,  $S$  et  $T$ , respectivement. Prouver que

$$|AR| \cdot |BS| \cdot |CT| = |ID| \cdot |IE| \cdot |IF|.$$

**Problème 4.**

- a) Trouver tous les entiers strictement positifs  $g$  satisfaisant la propriété suivante: pour tout nombre premier impair  $p$ , il existe un entier strictement positif  $n$  tel que  $p$  divise les deux entiers

$$g^n - n \quad \text{et} \quad g^{n+1} - (n + 1).$$

- b) Trouver tous les entiers strictement positifs  $g$  satisfaisant la propriété suivante: pour tout nombre premier impair  $p$ , il existe un entier strictement positif  $n$  tel que  $p$  divise les deux entiers

$$g^n - n^2 \quad \text{et} \quad g^{n+1} - (n + 1)^2.$$