



4th Benelux Mathematical Olympiad

20-22 April 2012 – Namur – Belgium

Problems

Language: *French*

Problème 1. Une suite $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ de nombres naturels est définie par la règle

$$a_{n+1} = a_n + b_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

où b_n est le dernier chiffre de a_n . Prouver qu'une telle suite contient une infinité de puissances de 2 si et seulement si a_1 n'est pas divisible par 5.

Problème 2. Trouver tous les quadruplets (a, b, c, d) de nombres réels strictement positifs tels que $abcd = 1$, $a^{2012} + 2012b = 2012c + d^{2012}$ et $2012a + b^{2012} = c^{2012} + 2012d$.

Problème 3. Dans le triangle ABC , le milieu de BC est noté M . Soit P un point variable à l'intérieur du triangle tel que $\angle CPM = \angle PAB$. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle ABP . La droite MP coupe Γ une deuxième fois en Q . Soit R le symétrique de P par rapport à la tangente à Γ en B . Prouver que la longueur $|QR|$ est indépendante de la position de P à l'intérieur du triangle.

Problème 4. Hier, $n \geq 4$ personnes se sont assises autour d'une table ronde. Chaque participant ne se souvient que de ses deux voisins, mais pas nécessairement lequel était assis à sa gauche et lequel à sa droite. Aujourd'hui, vous voudriez que les mêmes personnes s'assoient autour de la même table ronde de manière que chaque participant ait les mêmes voisins qu'hier (il est possible que le voisin de gauche d'hier soit le voisin de droite aujourd'hui). Vous avez le droit d'interroger certains participants : chaque personne ainsi sollicitée pointera du doigt ses deux voisins d'hier.

- Déterminer le nombre minimal $f(n)$ de participants qu'il vous faut interroger pour être certain d'y arriver, si aucune question ne peut dépendre des réponses antérieures reçues. En d'autres termes, vous devez choisir préalablement la liste des personnes que vous comptez interroger avant de poser la moindre question.
- Déterminer le nombre minimal $g(n)$ de participants qu'il vous faut interroger pour être certain d'y arriver, si toutes les questions peuvent dépendre des réponses antérieures reçues. En d'autres termes, vous pouvez attendre d'avoir reçu la première réponse avant de poser la deuxième question, et ainsi de suite.

*Temps accordé : 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points*