



THIRD BENELUX MATHEMATICAL OLYMPIAD

Luxembourg, 6–8 May 2011

Language: **Dutch**

Problem 1. Een geordend paar van gehele getallen (m, n) met $1 < m < n$ wordt een *Beneluxpaar* genoemd als de volgende twee eisen gelden: m heeft dezelfde priemdelers als n , en $m + 1$ heeft dezelfde priemdelers als $n + 1$.

- (a) Vind drie Beneluxparen (m, n) waarvoor geldt dat $m \leq 14$.
- (b) Bewijs dat er oneindig veel Beneluxparen bestaan.

Problem 2. In een driehoek ABC is I het middelpunt van de ingeschreven cirkel. De bissectrices AI , BI en CI snijden respectievelijk de zijden BC , CA en AB in de punten D , E en F . De middelloodlijn van het lijnstuk AD snijdt de lijnen BI en CI respectievelijk in M en N . Bewijs dat A , I , M en N op één cirkel liggen.

Problem 3. Voor elk geheel getal k definiëren we $c(k)$ als de grootste derde macht (van een geheel getal) kleiner dan of gelijk aan k . Vind alle gehele getallen $p \geq 1$ waarvoor de volgende rij begrensd is:

$$a_0 = p \quad \text{en} \quad a_{n+1} = 3a_n - 2c(a_n) \quad \text{voor } n \geq 0.$$

(Een rij a_0, a_1, \dots van reële getallen noemen we begrensd als er een $M \in \mathbb{R}$ is, zo dat voor alle $n \geq 0$ geldt dat $|a_n| \leq M$.)

Problem 4. Abby en Brian spelen een spel. Eerst kiezen ze een geheel getal $N \geq 1$. Daarna schrijven ze om beurten een getal op een bord. Abby begint met het opschrijven van 1. Vanaf dat moment, wanneer een van hen n opschrijft, moet de ander $n + 1$ of $2n$ opschrijven, onder de voorwaarde dat dat getal niet groter is dan N . Degene die N opschrijft wint het spel.

- (a) Bepaal welke speler een winnende strategie heeft als $N = 2011$.
- (b) Vind het aantal gehele getallen $1 \leq N \leq 2011$ waarvoor Brian een winnende strategie heeft.

*Beschikbare tijd: 4 uur en 30 minuten
Elke opgave is 7 punten waard.*