Language **French**

2nd Benelux Mathematical Olympiad
Amsterdam, 23–25 April 2010

Problems

Problème 1. Un ensemble fini d'entiers est appelé *mauvais* si la somme de ses éléments est 2010. Un ensemble fini d'entiers est un *ensemble Benelux* si aucun de ses sous-ensembles n'est mauvais. Trouver le plus petit entier n tel que l'ensemble $\{502, 503, 504, \ldots, 2009\}$ puisse être partitionné en n ensembles Benelux.
(Une partition d'un ensemble S en n sous-ensembles est une collection de n sous-ensembles deux à deux disjoints de S, dont l'union est S.)

Problème 2. Déterminer tous les polynômes $p(x)$ à coefficients réels tels que

$$p(a+b-2c)+p(b+c-2a)+p(c+a-2b)=3p(a-b)+3p(b-c)+3p(c-a)$$

pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Problème 3. La droite l contient trois points distincts A, B et P dans cet ordre. Soit a la perpendiculaire à l passant par A, et soit b la perpendiculaire à l passant par B. Une droite passant par P, distincte de l, coupe a en Q et b en R. La perpendiculaire à BQ passant par A coupe BQ en L et BR en T. La perpendiculaire à AR passant par B coupe AR en K et AQ en S.

(a) Montrer que P, T, S sont alignés.

(b) Montrer que P, K, L sont alignés.

Problème 4. Trouver tous les quadruples (a, b, p, n) d'entiers strictement positifs, tels que p est premier et

$$a^3 + b^3 = p^n.$$

Language: French

Temps accordé: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points