Language **German**

2nd Benelux Mathematical Olympiad
Amsterdam, 23–25 April 2010

Problems

Aufgabe 1. Eine endliche Menge ganzer Zahlen heisst *schlecht* wenn die Summe ihrer Elemente 2010 ist. Eine endliche Menge ganzer Zahlen heisst *Benelux-Menge* wenn keine ihrer Teilmengen schlecht ist. Finde die kleinste ganze Zahl n, so dass die Menge $\{502, 503, 504, \ldots, 2009\}$ in n Benelux-Mengen partitioniert werden kann.
(Eine Partition einer Menge S in n Teilmengen ist eine Familie von n paarweise disjunkten Teilmengen von S, deren Vereinigung ganz S ist.)

Aufgabe 2. Finde alle Polynome $p(x)$ mit reellen Koeffizienten so dass

$$p(a+b-2c)+p(b+c-2a)+p(c+a-2b)=3p(a-b)+3p(b-c)+3p(c-a)$$

für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 3. Auf der Geraden l liegen drei verschiedene Punkte A, B und P in dieser Reihenfolge. Sei a die Gerade durch A senkrecht zu l und b die Gerade durch B senkrecht zu l. Eine von l verschiedene Gerade durch P schneidet a in Q und b in R. Die Gerade durch A senkrecht zu BQ schneidet BQ in L und BR in T. Die Gerade durch B senkrecht zu AR schneidet AR in K und AQ in S.

(a) Zeige, dass P, T, S auf einer Geraden liegen.

(b) Zeige, dass P, K, L auf einer Geraden liegen.

Aufgabe 4. Finde alle Quadrupel (a, b, p, n) natürlicher Zahlen, so dass p eine Primzahl ist und

$$a^3 + b^3 = p^n.$$

Dauer: 4 Stunden und 30 Minuten
Jede Aufgabe gibt 7 Punkte