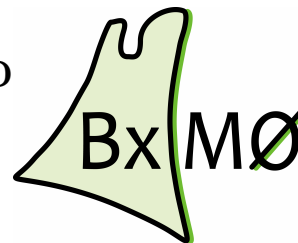


1st BENELUX MATHEMATICAL OLYMPIAD
Bergen op Zoom (Netherlands)
May 9, 2009



Language: **Dutch**

Opgave 1. Vind alle functies $f: \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ die voldoen aan de volgende twee voorwaarden:

- $f(n)$ is het kwadraat van een geheel getal voor alle $n \in \mathbb{Z}_{>0}$;
- $f(m+n) = f(m) + f(n) + 2mn$ voor alle $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Opgave 2. Zij n een positief geheel getal en zij k een oneven positief geheel getal. Laat bovendien a , b en c gehele getallen zijn (niet noodzakelijk positief) waarvoor geldt:

$$a^n + kb = b^n + kc = c^n + ka.$$

Bewijs dat $a = b = c$.

Opgave 3. Zij $n \geq 1$ een geheel getal. In dorp X wonen n meisjes en n jongens; elk meisje hier kent elke jongen. In dorp Y wonen n meisjes, g_1, g_2, \dots, g_n , en $2n - 1$ jongens, $b_1, b_2, \dots, b_{2n-1}$. Voor $i = 1, 2, \dots, n$ geldt dat meisje g_i jongens $b_1, b_2, \dots, b_{2i-1}$ kent en geen andere jongens. Zij r een geheel getal met $1 \leq r \leq n$. In elk van de dorpen wordt een feest gehouden waarbij r meisjes uit het betreffende dorp en r jongens uit hetzelfde dorp geacht worden met elkaar te dansen in r dansparen. Echter, elk meisje wil alleen dansen met een jongen die ze kent. Noem $X(r)$ het aantal manieren waarop we r dansparen kunnen kiezen in dorp X ; noem $Y(r)$ het aantal manieren waarop we r dansparen kunnen kiezen in dorp Y .

Bewijs dat $X(r) = Y(r)$ voor $r = 1, 2, \dots, n$.

Opgave 4. Zij gegeven een trapezium $ABCD$ met evenwijdige zijden AB en CD . Zij E een punt op de lijn BC , maar buiten lijnstuk BC , zodat lijnstuk AE snijdt met lijnstuk CD . Neem aan dat er een punt F bestaat op het inwendige van lijnstuk AD zodat $\angle EAD = \angle CBF$. Zij I het snijpunt van CD en EF en zij J het snijpunt van AB en EF . Zij K het midden van lijnstuk EF en neem aan dat K verschillend is van I en J . Bewijs dat K op de omgeschreven cirkel van $\triangle ABI$ ligt dan en slechts dan als K op de omgeschreven cirkel van $\triangle CDJ$ ligt.

*Beschikbare tijd: 4 uur en 30 minuten
Elke opgave is 7 punten waard*