1st BENELUX MATHEMATICAL OLYMPIAD
Bergen op Zoom (Netherlands)
May 9, 2009

Language: **French**

Problème 1. Soit $\mathbb{N}_0$ l'ensemble des naturels non nuls. Déterminer toutes les fonctions $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ qui satisfont les conditions suivantes :

- $f(n)$ est un carré parfait pour tout $n \in \mathbb{N}_0$;
- $f(m+n) = f(m) + f(n) + 2mn$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}_0$.

Problème 2. Soient n un entier strictement positif et k un entier positif impair. Soient a, b et c des entiers (pas nécessairement positifs) satisfaisant les équations

$$a^n + kb = b^n + kc = c^n + ka.$$

Prouver que $a = b = c$.

Problème 3. Soit $n \geq 1$ un entier. Dans la ville X il y a n filles et n garçons, et chaque fille connaît chaque garçon. Dans la ville Y il y a n filles, $g_1, g_2, \ldots, g_n$, et $2n-1$ garçons $b_1, b_2, \ldots, b_{2n-1}$. Pour $i = 1, 2, \ldots, n$ la fille g_i connaît les garçons $b_1, b_2, \ldots, b_{2i-1}$ et pas d'autres garçons. Soir r un entier tel que $1 \leq r \leq n$. Dans chacune des villes aura lieu une fête où r filles de la ville et r garçons de la même ville sont supposés danser ensemble en formant r couples. Cependant, chaque fille veut seulement danser avec un garçon qu'elle connaît. On note $X(r)$ le nombre de façons qu'on peut choisir r couples de danseurs dans la ville X; on note $Y(r)$ le nombre de façons qu'on peut choisir r couples de danseurs dans la ville Y.
Montrer que $X(r) = Y(r)$ pour $r = 1, 2, \ldots, n$.

Problème 4. Etant donné le trapèze $ABCD$ de bases AB et CD, soit E un point sur la droite BC hors du segment $[B, C]$ tel que le segment $[A, E]$ coupe le segment $[C, D]$. On suppose qu'il existe un point F à l'intérieur du segment $[A, D]$ tel que $\angle EAD = \angle CBF$. On note I le point d'intersection des droites CD et EF, et J celui des droites AB et EF. Soit K le milieu du segment $[E, F]$, et admettons que K est distinct de I et de J.
Prouver que K appartient au cercle circonscrit au $\triangle ABI$ si et seulement si K appartient au cercle circonscrit au $\triangle CDJ$.

Durée : 4 heures 30
Chaque problème vaut 7 points

Nous remercions les auteurs de ces problèmes pour les avoir mis à la disposition de l'Olympiade du Benelux. Nous avons accepté de ne les poster sur aucun forum ni de les rendre publiques de quelque manière que ce soit avant le 1er août 2009. Votre participation à la BxMO implique que vous acceptez de respecter cette contrainte.